

Termodinámica del universo temprano desde una cosmología newtoniana

W. A. Rojas C.^{1,*}

¹Universidad Nacional de Colombia

We study a model of fluent material universe from a modified Newtonian cosmology proposed by D'Inverno [1] and Tawfik [2]. From this perspective, it shows a list of space-time curvature k with energy E , density ρ , specific heat C_p and the fluid temperature gradient considered ΔT corresponding to standard thermodynamic variables. We determined the coupling constants accompanying the matter density for different values we can take k .

PACS numbers: 04.,04.20-q,04.70Bw,05.20.Gg

INTRODUCCIÓN

Consideremos una cosmología newtoniana sin constante cosmológica, tal como lo plantea Inverno[1], asumiendo que el universo se compone de una cierta cantidad materia en el sentido clásico, tal que la posición y velocidad de todas las partículas se pueden medir desde cierto punto O . Además de imponer que el Principio Cosmológico sea válido en este contexto. Tawfik muestra que al estudiar este tipo de cosmología y teniendo en cuenta los efectos viscosos de un modelo de universo se puede obtener resultados interesantes que son concordantes que la Cosmología FRW [2]. De acuerdo a lo anterior se plantea la necesidad de investigar los efectos que experimentan los parámetros termodinámicos como lo son la densidad ρ y el calor específico C_p en función de de parámetros cosmológicos tales como el factor de escala $a(t)$ y la constante de Hubble H_0 .

UN MODELO DE COSMOLOGÍA NEWTONIANA

De acuerdo a lo anterior se tiene que la energía total de una partícula de masa m que se halla a una distancia a de un punto arbitrario O , que se puede mover con cierta velocidad radial \dot{a} y está afectada por el potencial gravitacional $V(a) = -\frac{GMm}{a}$; con G siendo la constante de gravitación universal y M la masa del fluido en el cual se mueve la partícula e igual a $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$. Por lo que el fluido experimenta una ganancia de energía térmica debido al movimiento de la partícula dentro de el [1, 2]

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{GMm}{a} - C_p M \Delta T. \quad (1)$$

Con C_p siendo el calor específico del fluido y ΔT el gradiente de temperatura al cual se somete la partícula. Así (1) se puede reescribir como

$$\dot{a}^2 - \frac{2E}{m} - \frac{8}{3} \frac{a^3 \rho C_p \Delta T}{m} = \frac{8}{3} \pi G a^2 \rho. \quad (2)$$

Comparando con la primera de las ecuaciones de Friedmann derivadas de la Relatividad General sin constante cosmológica para un modelo de gas ideal

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8}{3} \pi G a^2 \rho, \quad (3)$$

de acuerdo a lo anterior se logra vincular la curvatura espacio-temporal k con ciertas variables termodinámicas tal como el calor específico C_p , la densidad ρ y el gradiente de temperatura ΔT

$$k = -\frac{2E}{m} - \frac{8}{3} \frac{a^3 \rho C_p \Delta T}{m}. \quad (4)$$

Con los posibles valores que puede tomar k $[+1, 0, -1]$ se tendrán los diferentes escenarios de curvatura del espacio-tiempo:

1. En el caso de $k = +1$ con lo que (4) se puede determinar el valor de ρ en términos de los demás parámetros

$$\rho = -\frac{3}{8} \frac{(m+2E)}{C_p \Delta T} \frac{1}{a^3} \quad (5)$$

2. En el caso de $k = -1$ se tiene

$$\rho = \frac{3}{8} \frac{(m-2E)}{C_p \Delta T} \frac{1}{a^3} \quad (6)$$

3. En el caso de $k = 0$ se tiene

$$\rho = \frac{-E}{4C_p \Delta T} \frac{1}{a^3}, \quad (7)$$

En todos los casos considerados se muestra que $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ lo cual indica un modelo de universo dominado por materia, que era lo que se pretendía desde el principio. Consideraciones para (5), (6) y (7) la densidad debe ser siempre mayor que cero. La masa de igual forma es mayor que cero; no se tienen en cuenta formas extrañas de materia (masa o energía oscura). $\Delta T < 0$ pues $\Delta T = T_f - T_0$ pues $T_0 > T_f$ pues el universo comenzó en un punto de muy elevada densidad y temperatura. El calor específico del sistema se comporta clásicamente $C_p > 0$.

COSMOLOGÍA FRW

Para un espacio-tiempo tipo FRW [3] se tiene que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía para un gas ideal, y el hecho que su derivada covariante sea igual a cero esta

asociada con la primera ley de termodinámica, de lo que se desprende

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + P), \quad (8)$$

con P siendo la presión ejercida por el gas ideal. Si elegimos $P = 0$, (8) se reduce a

$$\rho = \frac{cte}{a^3}. \quad (9)$$

De la comparación de (9) con (5), (6) y (7) se puede determinar los posibles valores que puede tomar tal constante para los casos de k considerados

1. Con $k = 1$

$$cte = -\left(\frac{3}{8}\right) \frac{(m+2E)}{C_p \Delta T}.$$

2. Con $k = -1$

$$cte = \left(\frac{3}{8}\right) \frac{(m-2E)}{C_p \Delta T}.$$

3. Con $k = 0$

$$cte = -\frac{2E}{4C_p \Delta T}.$$

Donde hemos asumido una ecuación de estado de la forma

$$\rho \propto a^{-3(w+1)},$$

que para el caso que estamos estudiando $w = 0$; por lo que $\rho \propto a^{-3}$ [4]. Si establecemos la hipótesis que la densidad del fluido en nuestro modelo sea igual a la densidad crítica; con la densidad crítica definida como

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

donde H_0 corresponde a la constante de Hubble para la época actual. Por lo que podemos hallar el calor específico del fluido en consideración de acuerdo a los valores que toma k

1. Para $k = 1$

$$C_{p1} = -\frac{\pi G(m+2E)}{\Delta T H_0^2} \left(\frac{1}{a^3}\right). \quad (10)$$

2. Para $k = -1$

$$C_{p2} = \frac{\pi G(m-2E)}{\Delta T H_0^2} \left(\frac{1}{a^3}\right). \quad (11)$$

3. Para $k = 0$

$$C_{p3} = -\frac{2\pi G E}{3\Delta T H_0^2} \left(\frac{1}{a^3}\right). \quad (12)$$

En los casos analizados se observa que $C_p \propto \frac{1}{a^3}$, lo cual significa que el calor específico para universo con dominio de materia decrece al expandirse el universo; tal como se aprecia en la Figura 1. La relación existente entre $C_{p1}/C_{p2} = -1$ lo que permite afirmar que la geometría espacio-temporal afecta el calor específico del fluido en consideración.

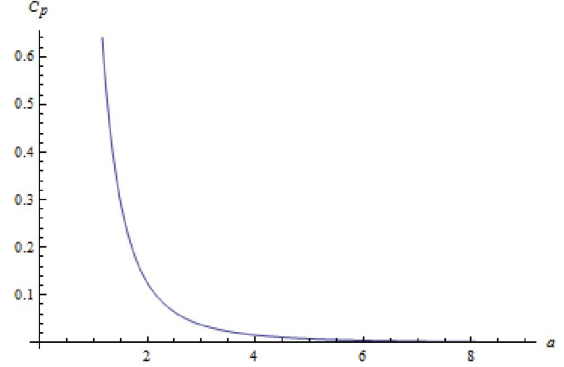


Figura 1. Comportamiento del calor específico C_p en función del factor de escala $a(t)$

CONCLUSIONES

El uso de una cosmología newtoniana ha mostrado resultados consistentes con la cosmología FRW. Así, la curvatura espacio-tiempo está relacionada con la energía E , la densidad ρ , el calor específico C_p y el gradiente de temperatura del fluido considerado ΔT que corresponden a variables de la termodinámica estándar. Cuando se consideró las constantes de acople que acompañan la densidad descritas en (5), (6) y (7) para los diferentes valores, que puede tomar k son consistentes con las soluciones estándar de la cosmología.

Un hecho relevante es que el calor específico está dado como $C_p \propto \frac{1}{H_0^2 a^3}$ en los casos considerados; este decrece al expandirse y enfriarse el universo.

REFERENCES

-
- * warojasc@unal.edu.co
- [1] R. D'Inverno, *Introducción a la Relatividad de Einstein*, Oxford University Press Inc., New York (1998).
 - [2] A. Tawfik, e-Print: arXiv:1002.0269v1 [gr-qc].
 - [3] D. McMahon, *Relativity Demystified*, The McGraw-Hill Companies., New York (2006).
 - [4] S. M. Carroll, e-Print: arXiv:9712019v1 [gr-qc].
 - [5] W. A. Rojas C. Tesis de Maestría *Termodinámica de un gas de fotones en la vecindad de una superficie de Schwarzschild*. Observatorio Astronómico Nacional. Universidad Nacional de Colombia. Director: J. R. Arenas S. Disponible en: www.observatorio.unal.edu.co/archivos/tesisOAN/2010/wRojas.pdf
 - [6] R. C. Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*. Dover Publications Inc., New York (1987).